第3講　場合の数と確率

1　花子さんと太郎さんは，得点に応じた景品を一つもらえる，さいころを使った次のゲームを行う。ただし，得点なしの場合は景品をもらえない。

ゲームのルール

- 最初にさいころを1回投げる。
- さいころを1回投げた後に，続けて2回目を投げるかそれとも1回で終えて2回目を投げないかを，自分で決めることができる。
- 2回目を投げた場合は，出た目の合計を6で割った余りを A とする。2回目を投げなかった場合は，1回目に出た目を6で割った余りを A とする。
- A が決まった後に，さいころをもう1回投げ，出た目が A 未満の場合は A を得点とし，出た目が A 以上のときは得点なしとする。

(1)　1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げる場合を考える。$A=4$ となるのは出た目の合計が **ア** または **イウ** の場合であるから，$A=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。また，$A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　花子さんは 4 点以上の景品が欲しいと思い，$A \geqq 4$ となる確率が最大となるような戦略を考えた。

例えば，さいころを 1 回投げたところ，出た目は 5 であったとする。この条件のもとでは，2 回目を投げない場合は確実に $A \geqq 4$ となるが，2 回目を投げると $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。よって，この条件のもとでは 2 回目を投げない方が $A \geqq 4$ となる確率は大きくなる。

1 回目に出た目が 5 以外の場合も，このように 2 回目を投げない場合と投げる場合を比較すると，花子さんの戦略は次のようになる。

花子さんの戦略

1 回目に投げたさいころの目を 6 で割った余りが $\boxed{\text{コ}}$ のときのみ，2 回目を投げる。

1 回目に投げたさいころの目が 5 以外の場合も考えてみると，いずれの場合も 2 回目を投げたときに $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。このことから，花子さんの戦略のもとで $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，この確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ より大きくなる。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪　2 以下	①　3 以下	②　4 以下
③　2 以上	④　3 以上	⑤　4 以上

（次ページに続く。）

(3)　太郎さんは，どの景品でもよいからもらいたいと思い，得点なしとなる確率が最小となるような戦略を考えた。

例えば，さいころを1回投げたところ，出た目は3であったとする。この条件のもとでは，2回目を投げない場合，得点なしとなる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ であり，2回目を投げる場合，得点なしとなる確率は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}$ である。よって，1回目に投げたさいころの目が3であったときは，［テ］。

1回目に投げたさいころの目が3以外の場合についても考えてみると，太郎さんの戦略は次のようになる。

太郎さんの戦略

1回目に投げたさいころの目を6で割った余りが［ト］のときのみ，2回目を投げる。

この戦略のもとで太郎さんが得点なしとなる確率は $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}$ であり，この確率は，1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げる場合における得点なしとなる確率より小さくなる。

［テ］の解答群

⓪　2回目を投げない方が得点なしとなる確率は小さい
①　2回目を投げた方が得点なしとなる確率は小さい
②　2回目を投げても投げなくても得点なしとなる確率は変わらない

［ト］の解答群

⓪　2以下	①　3以下	②　4以下
③　2以上	④　3以上	⑤　4以上

2　二つの袋A，Bと一つの箱がある。Aの袋には赤球2個と白球1個が入っており，Bの袋には赤球3個と白球1個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1)　A，Bの袋から球をそれぞれ1個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の2個の球のうち少なくとも1個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を1個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それがBの袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　A，B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また, 箱の中の 4 個の球のうち, ちょうど 3 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第３講　場合の数と確率

[1] 2回目を投げた場合

出目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0

2回目を投げなかった場合

出目	1	2	3	4	5	6
A	1	2	3	4	5	0

(1) 2回目を投げた場合，$A=4$ となるのは，出た目の合計が4または10の場合である。

2回の出た目を(1回目に出た目，2回目に出た目)で表すと，

出た目の合計が4となるのは (1，3)，(2，2)，(3，1) の3通り

出た目の合計が10となるのは (4，6)，(5，5)，(6，4) の3通り

であるから，$A=4$ となる確率は $\dfrac{3+3}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

また，$A=5$ となるのは，出た目の合計が5または11の場合である。

出た目の合計が5となるのは (1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1) の4通り

出た目の合計が11となるのは (5，6)，(6，5) の2通り

であるから，$A=5$ となる確率は $\dfrac{4+2}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

したがって，$A\geqq 4$ となる確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2) 1回目に出た目が5のとき

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は1である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

2回目に出た目が5，6の場合であるから，起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が5の場合は，2回目を投げない方が $A\geqq 4$ となる確率が高い。

1回目に出た目が4の場合

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は1である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

2回目に出た目が1，6の場合であるから，起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が4の場合は，2回目を投げない方が $A\geqq 4$ となる確率が高い。

1回目に出た目が1，2，3，6の場合

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は0である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

1回目に出た目		2回目に出た目
1	$\Longrightarrow$	3，4
2	$\Longrightarrow$	2，3
3	$\Longrightarrow$	1，2
6	$\Longrightarrow$	4，5

の場合であるから，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が1，2，3，6の場合は，2回目を投げる方が $A \geqq 4$ となる確率が高い。

以上より，1回目に投げたさいころの目がいずれの場合も，2回目を投げたときに $A \geqq 4$ になる確率は $\dfrac{1}{3}$ であり

・1回目に出た目が1，2，3，6の場合，2回目を投げない場合に $A \geqq 4$ となる確率は0

・1回目に出た目が4，5の場合，2回目を投げない場合に $A \geqq 4$ となる確率は1

となるから，$A \geqq 4$ となる確率が最大となる花子さんの戦略は

> 1回目に投げたさいころの目を6で割った余りが3以下(①)のときのみ，2回目を投げる。

である。また，この戦略のもとで，$A \geqq 4$ となる確率は

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{5}{9}$$

であり，この確率は，1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げたときに $A \geqq 4$ となる確率 $\dfrac{1}{3}$ より大きくなる。

(3)　A が決まった後に行う，さいころを1回投げる試行を T とする。

1回目に出た目が3のとき

・2回目を投げない場合，得点なしとなるのは，試行 T で出た目が3以上のときであり，起こる確率は $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ である。

・2回目を投げる場合，得点なしとなるのは

2回目に出た目		A		Tで出た目		確率
1	$\Longrightarrow$	4	$\Longrightarrow$	4〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{3}{6}$
2	$\Longrightarrow$	5	$\Longrightarrow$	5，6	$\Longrightarrow$	$\frac{2}{6}$
3	$\Longrightarrow$	0	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}$
4	$\Longrightarrow$	1	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}$
5	$\Longrightarrow$	2	$\Longrightarrow$	2〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{5}{6}$
6	$\Longrightarrow$	3	$\Longrightarrow$	3〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{4}{6}$

であるから，起こる確率は $\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}\right)=\frac{13}{18}\left(>\frac{2}{3}\right)$ である。

よって，1回目に投げたさいころの目が3であったときは，2回目を投げない方が得点なしとなる確率は小さい　(⓪)

1回目に出た目が3以外の場合も，2回目を投げる場合，2回目に出た目1〜6にAの値0〜5が1：1で対応し，確率 $\frac{13}{18}$ で得点なしとなる。

2回目を投げない場合，得点なしとなるのは

1回目に出た目		A		Tで出た目		確率
1	$\Longrightarrow$	1	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}=\frac{18}{18}$
2	$\Longrightarrow$	2	$\Longrightarrow$	2〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$
3	$\Longrightarrow$	3	$\Longrightarrow$	3〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{4}{6}=\frac{12}{18}$
4	$\Longrightarrow$	4	$\Longrightarrow$	4〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$
5	$\Longrightarrow$	5	$\Longrightarrow$	5，6	$\Longrightarrow$	$\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$
6	$\Longrightarrow$	0	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}=\frac{18}{18}$

であるから，太郎さんの戦略は

> 1回目に投げたさいころの目を6で割った余りが2以下(⓪)のときのみ，2回目を投げる。

である。またこの戦略のもとで，得点なしとなる確率は

$$\frac{1}{6}\times\left(\frac{13}{18}+\frac{13}{18}+\frac{12}{18}+\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{13}{18}\right)=\frac{11}{18}$$

であり，この確率は，1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げる場合に得点なしとなる確率 $\frac{13}{18}$ より小さくなる。

2　袋A：赤球2個，白球1個　　　袋B：赤球3個，白球1個

(1)　(i)「箱の中の2個の球のうち少なくとも1個が赤球である」事象は，「箱の中の2個の球がともに白球である」事象の余事象である。よって，求める確率は

$$1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

(ii)　箱の中から赤球が取り出されるのは，次の場合

①　袋Aから赤球，袋Bから赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times1=\frac{1}{2}$

②　袋Aから赤球，袋Bから白球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

③　袋Aから白球，袋Bから赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

①～③は互いに排反であるから，箱の中から赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$$

取り出された球が赤球であり，かつそれがBの袋に入っていたものであるのは，①において箱から取り出された赤玉がBの袋に入っていたものである場合と，③の場合であり，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ である。

したがって，取り出された球が赤球であったときに，それがBの袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{9}{17}$$

(2)　Aの袋から球を2個取り出したとき

2個とも赤球である確率は $\frac{1}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$　　赤球と白球1個ずつである確率は $\frac{2}{3}$

Bの袋から球を2個取り出したとき

2個とも赤球である確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$　　赤球と白球1個ずつである確率は $\frac{1}{2}$

(i)　箱の中の4個の球のうち，ちょうど2個が赤球であるのは

A，Bの袋からそれぞれ赤球と白球を1個ずつ取り出す場合　……①

のみである。よって，その確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

箱の中の4個の球のうち，ちょうど3個が赤球であるのは

・Aの袋から赤球を2個，Bの袋から赤球と白球を1個ずつ取り出す場合　……②

・Aの袋から赤球と白球を1個ずつ，Bの袋から赤球を2個取り出す場合　……③

のいずれかである。よって，その確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

また，箱の中の4個の球が，4個とも赤球であるのは

A，Bの袋からそれぞれ赤球を2個取り出す場合　……④

のみであり，その確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　箱の中から球を2個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は，箱の中の4個の球のうち

ちょうど2個が赤球であるとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$

ちょうど3個が赤球であるとき　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

4個とも赤球であるとき　$\dfrac{1}{6}\times1=\dfrac{1}{6}$

したがって，箱の中から球を2個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{17}{36}$

また，取り出した2個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの1個のみがBの袋(もう1個はAの袋)に入っていたものである確率は

①のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{18}$　　②のとき　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{18}$

③のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{9}$　　④のとき　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{9}$

よって，取り出した2個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの1個のみがBの袋に入っていたものである確率は

$$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$$

したがって，取り出した2個の球がどちらも赤球であったときに，そのうちの1個のみがBの袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}}=\dfrac{12}{17}$$